$$(10)\quad \boxed{\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}\, b_{\tau\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\, b_{\tau\beta} + b_{\beta\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0.}$$

Die Gleichungen (9) heißen Gauß-Gleichungen, und (10) nennt man die Mainardi-Codazzi-Gleichungen. Gemäß Herleitung sind (9), (10) äquivalent zu $X_{,\beta\gamma\alpha} = X_{,\alpha\gamma\beta}$.

Der Riemannsche Krümmungstensor

$$R: T_pS \times T_pS \times T_pS \longrightarrow T_pS$$

wird definiert durch

$$(11)\quad R(U,V)W := R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}\, U_\alpha V_\beta W_\gamma\, X_{,\tau},$$

wobei $\quad U = U_\alpha X_{,\alpha},\ V = V_\beta X_{,\beta},\ W = W_\gamma X_{,\gamma}.$

Ist $\ Z = Z_\delta X_{,\delta}$, so folgt aus (11) und (9)

$$R(U,V)W \cdot Z = R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}\, U_\alpha V_\beta W_\gamma Z_\delta\, X_{,\tau} \cdot X_{,\delta} =:$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, U_\alpha V_\beta W_\gamma Z_\delta ,$$

wobei

$$(12)\quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} := g_{\delta\tau} R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma} \underset{(9)}{=} b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}.$$

Für die Gauß-Krümmung gilt die Formel

$$K = \det(b_{\alpha\beta})/\mathcal{W}^2, \quad \mathcal{W}^2 := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2,$$

d.h. mit obiger Setzung (vgl. (12))

$$R_{1212} = b_{21} b_{12} - b_{11} b_{22} = -\det(b_{\alpha\beta}) = -K\mathcal{W}^2$$

$$\Longrightarrow (13) \quad \boxed{K = -R_{1212}/\mathcal{W}^2}.$$

Der Tensor 4^{ter} Ordnung $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist gemäß (12) aus den Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ der Fundamentalmatrix der Zweiten Fundamentalform zusammengesetzt, und er entsteht aus "$R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ durch Multiplikation mit $g_{\delta\tau}$". In der Definitionsgleichung (9) für $R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ hat man die Darstellung von $R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ durch die Christoffel-Symbole zweiter Art <u>und deren erste Ableitungen</u>.

Aus (3) und (8) ergibt sich die Darstellbarkeit der

Christoffel-Symbole 2^{ter} Art in Termen von $g_{\alpha\beta}$ und ersten Ableitungen davon, also:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ sowie ersten und zweiten}$$

partiellen Ableitungen davon.

Wegen $W^2 = \det(g_{\alpha\beta})$ ergibt (13) folgendes Schlussresultat:

Die geometrische Größe K - definiert durch die Zweite Fundamentalform - hängt nur ab von den Koeffizienten der Ersten Fundamentalform sowie deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Damit ist das Theoreme Egregium bewiesen. $\square$

Speziell betrachten wir eine <u>orthogonale Parametrisierung</u>, d.h. per Definition $\mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0$. Dann ist

$$W^2 = \mathcal{E}\,\mathcal{G}$$

und mit der üblichen Symbolik ergibt (4):

$$\Gamma_{111} = X_{uu} \cdot X_u = \frac{1}{2} E_u ,$$

$$\Gamma_{221} = X_{uv} \cdot X_v = \frac{1}{2} G_u = \Gamma_{122} ,$$

$$\Gamma_{121} = X_{uu} \cdot X_v = F_u - \frac{1}{2} E_v = -\frac{1}{2} E_v ;$$

$$\Gamma_{212} = X_{vv} \cdot X_u = F_v - \frac{1}{2} G_u = -\frac{1}{2} G_u ,$$

$$\Gamma_{112} = X_{uv} \cdot X_u = \frac{1}{2} E_v ,$$

$$\Gamma_{222} = X_{vv} \cdot X_v = \frac{1}{2} G_v ,$$

wobei hier $(u_1, u_2) \leftrightarrow (u, v)$ ersetzt wurde. Daraus folgt für die Christoffel-Symbole zweiter Art (s. (4) und benutze $(g_{rs}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$!)

$$(14) \quad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} E_u / E , & \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} G_u / G , \\ \Gamma^2_{11} = - E_v / 2G , & \Gamma^1_{22} = - G_u / 2E , \\ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} E_v / E , & \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} G_v / G . \end{cases}$$

(13) ergibt

$$K = -\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}} R_{1212} \underset{\substack{(12),\\ \text{Def. von } R\ldots}}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}} g_{22} R^{2}_{121}$$

$$= -\frac{1}{\mathcal{E}} R^{2}_{121} \underset{(9)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}} \Big[\Gamma^{2}_{21,1} - \Gamma^{2}_{11,2} + \Gamma^{2}_{\delta 1} \Gamma^{\delta}_{21} - \Gamma^{2}_{\delta 2} \Gamma^{\delta}_{11} \Big].$$

$$\underset{(14)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}} \Big[\tfrac{1}{2} (\mathcal{G}_u / \mathcal{G})_u + \tfrac{1}{2} (\mathcal{E}_v / \mathcal{G})_v + \Gamma^{2}_{11} \Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{2}_{21} \Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{2}_{12} \Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{22} \Gamma^{2}_{11} \Big]$$

$$\underset{(14)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{1}{2} \Big[\big(\mathcal{G}_u/\mathcal{G}\big)_u + \big(\mathcal{E}_v/\mathcal{G}\big)_v + \tfrac{1}{2}\big(-\mathcal{E}_v/\mathcal{G}\big) \cdot \big(\mathcal{E}_v/\mathcal{E}\big) + \big(\mathcal{G}_u/\mathcal{G}\big)^2 \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \big(\mathcal{G}_u/\mathcal{G}\big) \cdot \big(\mathcal{E}_u/\mathcal{E}\big) - \big(\tfrac{1}{2}\mathcal{G}_v/\mathcal{G}\big) \cdot \big(-\mathcal{E}_v/\mathcal{G}\big) \Big]$$

$$= -\frac{1}{2\mathcal{E}} \Big[\big(\mathcal{G}_u/\mathcal{G}\big)_u + \big(\mathcal{E}_v/\mathcal{G}\big)_v - \frac{(\mathcal{E}_v)^2}{2\mathcal{E}\mathcal{G}} + \frac{(\mathcal{G}_u)^2}{2\mathcal{G}^2} - \frac{\mathcal{E}_u \mathcal{G}_u}{2\mathcal{E}\mathcal{G}} + \frac{\mathcal{E}_v \mathcal{G}_v}{2\mathcal{G}^2} \Big].$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung rechnet man nach:

<u>Satz 5:</u> Sei S reguläre Fläche und $X: U \to S$ eine <u>orthogonale Parametrisierung</u> auf $U \subset \mathbb{R}^2$, also $F = X_u \cdot X_v \equiv 0$. Dann gilt für die Gauß-Krümmung auf U:

$$(15) \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right],$$

wobei wie üblich $E_v = \frac{\partial}{\partial v} E$, etc.

Bei <u>isothermer Parametrisierung</u>, also $F = 0$, $E = G = \lambda^2 > 0$, ergibt (15)

$$(16) \quad K = -\lambda^{-2} \, \Delta(\ln \lambda),$$

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Bemerkung zu (16): Es ist jetzt $E_v / \sqrt{EG} = \frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2) / \lambda^2 = \frac{\partial}{\partial v}(\ln \lambda^2) = 2 \frac{\partial}{\partial v}(\ln \lambda)$, so dass $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathcal{E}_v}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right) = 2\,\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\ln\lambda)$, usw.

Die Gleichungen von Gauß (9) und von Mainardi-Codazzi (10) sind für die Flächentheorie von derselben Bedeutung wie die Frenet'schen Formeln für Kurven, es gilt:

<u>Theorem von Bonnet:</u> Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen. Auf V seien glatte Funktionen $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}; \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ gegeben mit $\mathcal{E}, \mathcal{G} > 0$.
Außerdem: $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 > 0$!
Man definiert <u>formal</u> die Christoffel-Symbole sowie die anderen Größen, die in den Gleichungen von Gauß und Mainardi/Codazzi auftreten, und verlangt, dass diese Gleichungen gelten. <u>Dann gibt es zu jedem Punkt $q \in V$ eine Umgebung $U \subset V$ und eine Abbildung $X: U \to \mathbb{R}^3$, so dass $X(U)$ eine reguläre Fläche ist mit Koeffizienten $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ für I bzw. II.</u>

Ist U zusammenhängend und $\tilde{X}: U \to \mathbb{R}^3$ eine andere Parametrisierung mit denselben Eigenschaften, so gilt $\tilde{X} = T \circ \rho \circ X$ mit einer Translation $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und einer orthogonalen Abbildung $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\det \rho > 0$.

Beweis: Do Carmo, deutsche Ausgabe, p. 243 f, allerdings fehlen dort Details, aber es gibt Referenzen. $\square$

Folgerungen aus dem Theorema Egregium: (Alle Flächen S seien ab jetzt zusammenhängend)

Satz 6 (von Chern, 1945)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre geschlossene (, d.h. S ist kompakt) Fläche mit positiver Gauß-Krümmung. Für die Hauptkrümmungen gelte

$$\overbrace{x_1 \geq x_2}^{\text{o.E.}} \quad , \quad x_2 = f(x_1)$$

mit einer monoton fallenden Funktion f. Dann ist S eine Sphäre.

Korollar 1: Ist S eine geschlossene reguläre Fläche mit Gauß-Krümmung $K \equiv \text{const} > 0$, so ist S eine Sphäre

Beweis von Korollar 1. Zunächst kann man die Voraussetzung sogar noch etwas abschwächen, denn es folgt bereits aus $K \equiv \text{const}$ und der Geschlossenheit von S, dass $K > 0$ sein muss. Dazu $S \subset \overline{B_R(0)}$ und $R_0 = \inf\{R > 0 : S \subset \overline{B_R(0)}\}$ der kleinste Radius. S und $S_0 := \partial B_{R_0}(0)$ haben einen Berührpunkt $p \in S \cap S_0$. Dann ist $T_p S = T_p S_0$, also liegt S ganz auf einer

Seite von $(T_p S) + p$ (affine Tangentialebene) und kann die affine Tangentialebene nur in p berühren. Das ergibt $K \geq 0$. $K = 0$ ist aber nicht möglich.

Also ist $K = \varkappa_1 \varkappa_2 > 0$. O.E. sei $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$. Es folgt $\varkappa_2 = K / \varkappa_1$ und $f(\varkappa_1) := K/\varkappa_1$ fällt monoton. Chern's Satz liefert die Aussage.

<u>Korollar 2</u>: Sind $S, \tilde{S}$ zueinander <u>isometrische</u> Flächen, und ist $\tilde{S}$ <u>eine Sphäre</u>, <u>so ist auch</u> S <u>eine Sphäre</u>, <u>und zwar mit demselben Radius wie $\tilde{S}$</u>.

Beweis von Korollar 2: $\tilde{S}$ Sphäre heißt $K_{\tilde{S}} \equiv \text{const}$ $(= 1/\text{Radius})$, und da $S, \tilde{S}$ zueinander isometrisch sind, stimmen die Ersten Fundamentalformen von S und $\tilde{S}$ an entsprechender Stelle überein, also nach dem Theorema Egregium $K_S \equiv \text{const}$.

Nun benutze man Korollar 1. $\square$

Korollar 3 : Sei S eine geschlossene Fläche mit positiver Gauß-Krümmung K. Ist dann die mittlere Krümmung H konstant, so ist S eine Sphäre.

Beweis von Korollar 3: Es ist

$$2H = \varkappa_1 + \varkappa_2 \equiv c,$$

und $\varkappa_1 \varkappa_2 > 0$ besagt, dass $\varkappa_1, \varkappa_2$ dasselbe Vorzeichen haben, o.E. $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$. Es ist $\varkappa_2 = c - \varkappa_1$ fallend, Chern's Satz liefert die Behauptung. $\square$

Beweis von Satz 6: Die Voraussetzungen

$$K > 0 \ , \ \varkappa_1 \geq \varkappa_2 \, , \ \varkappa_2 = f(\varkappa_1) \, , \ f \downarrow ,$$

seien erfüllt. Da S kompakt ist, nimmt $\varkappa_1$ in einem Punkt $p \in S$ sein Maximum an. Offenbar ist